

# Chapitre

## Echantillonnage du signal

### Introduction

Bon nombre de systèmes fonctionnent tout en analogique. Cependant, avec l'omniprésence des systèmes numériques (microcontrôleur, microprocesseur, DSP, CPLD, ...) les correcteurs numériques sont inévitables, qu'ils soient industriels ou qu'ils soient réalisés par un système informatique. En effet, ils présentent des caractéristiques intéressantes en termes d'adaptation et de réglage. Nous allons donc étudier l'échantillonnage d'un signal continu et ensuite les systèmes linéaires échantillonnés.

Cependant, ne perdons pas de vue que le système à piloter, lui est toujours continu, ce qui impose dans la chaîne de commande numérique au moins un convertisseur numérique-analogique et un convertisseur analogique-numérique. On utilisera également, un autre organe afin de maintenir la valeur numérique dans le temps pour qu'elle puisse être prise en compte par le système ; très souvent on utilise pour cela un Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ).

### Echantillonnage du signal

Echantillonner ou numériser un signal continu, revient à prendre des valeurs de ce signal (**échantillons**) à des instants donnés (**instants d'échantillonnage**) et souvent de façon régulière (**période d'échantillonnage**). On montre qu'il faut un minimum d'échantillons et que ce minimum dépend du contenu fréquentiel du signal à traiter. Pour ce faire, Schannon a montré la relation suivante :

$$T_e \leq \frac{1}{2F_M} \text{ ou } F_e \geq 2F_M$$

Avec :  $T_e$ , la période d'échantillonnage,

$F_M$ , la fréquence la plus haute contenue dans le signal à numériser,

$F_e$ , la fréquence d'échantillonnage.

L'organe qui réalise la discrétisation  $f^*(t)$  d'un signal continu  $f(t)$  est **un échantillonneur**.

On le représente généralement comme un interrupteur

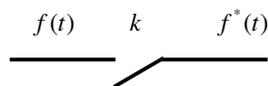


Figure 1 : Représentation d'un échantillonneur

Il est très facile de montrer qu'une fréquence faible ne permet pas toujours de remonter au signal d'origine. Dans la pratique, on prend plutôt  $F_e$  dans l'intervalle suivant :

$$5F_M < F_e < 25F_M$$

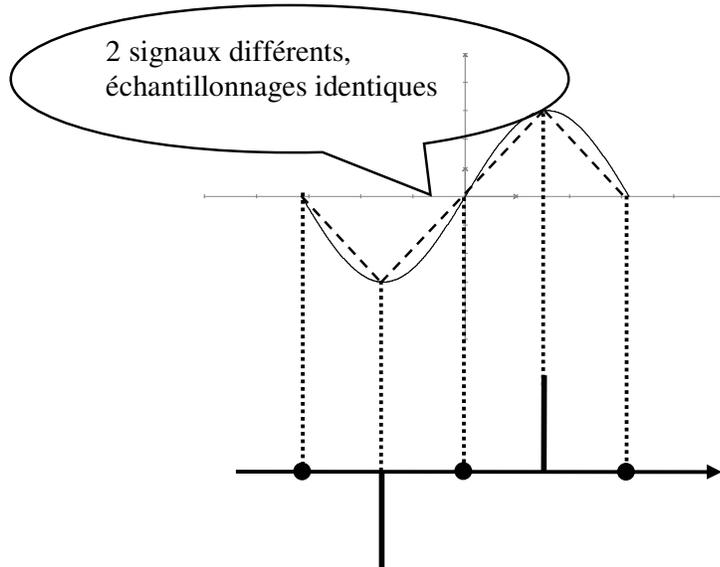


Figure 2 : exemple de  $F_e > 2F_M$  mais insuffisante ( $F_e = 4F_M$ )

Regardons maintenant quelques méthodes d'échantillonnage.

## Echantillonneur idéal

Un échantillonneur idéal prend, à intervalles réguliers, la valeur du signal de manière instantanée. Mathématiquement, cela revient à multiplier le signal continu par une série d'impulsion que l'on appelle **peigne de Dirac**. Soit  $f^*(t) = f(t)d(t)$  avec  $d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$ .

où  $\delta(t)$  est une impulsion de Dirac, soit une impulsion d'aire =1 et d'amplitude  $1/\Delta t$ , avec  $\tau \rightarrow 0$ .

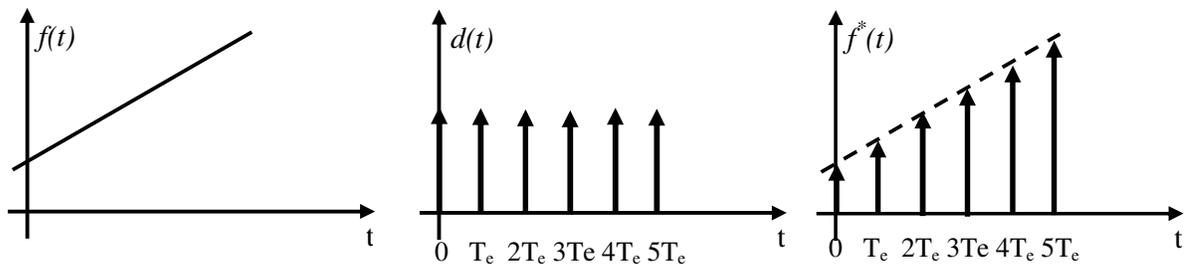


Figure 3 : Passage du signal continu  $f(t)$  au signal discrétisé  $f^*(t)$  idéal

Par conséquent :  $f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e)$

Dans le cas de systèmes causaux :  $f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e)$

## Echantillonneur réel

Une impulsion de Dirac idéale possède une aire unité, une amplitude de  $1/\Delta t$ . Pour la réelle il faut considérer la durée  $\Delta t$ , faible mais pas nulle. Donc le signal réel est une suite d'impulsions d'amplitude  $\frac{f(nT_e)}{\Delta t}$ , de largeur  $\Delta t$  (Figure 4).

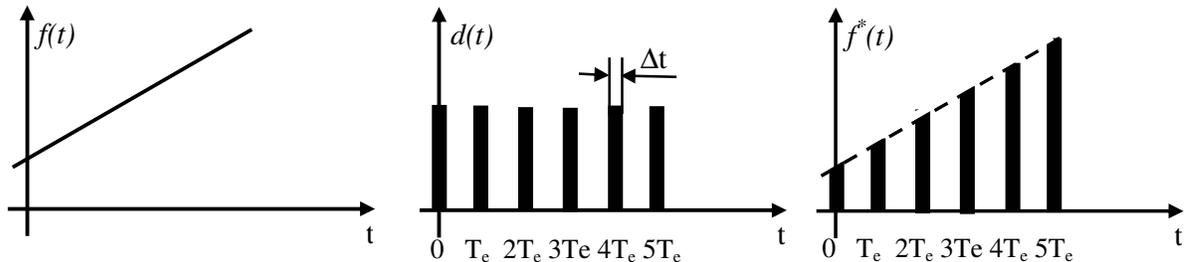


Figure 4 : Passage du signal continu  $f(t)$  au signal discrétisé  $f^*(t)$  réel

Avec cet échantillonneur, le signal  $f^*(t)$  suit les variations de  $f(t)$  pendant toute la durée de l'intervalle d'échantillonnage.

## Echantillonneur bloqueur (d'ordre zéro)

L'échantillonneur bloqueur est simple à réaliser. Il donne un signal échantillonné  $f^*(t)$  dont chaque échantillon demeure constant pendant l'intervalle d'échantillonnage.

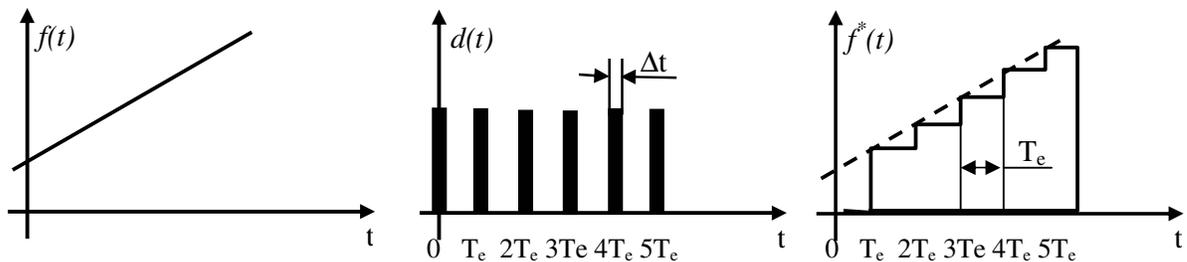


Figure 5 : Passage du signal continu  $f(t)$  au signal discrétisé  $f^*(t)$  avec un échantillonneur bloqueur

## Echantillonneur moyennneur

Cet échantillonneur est un échantillonneur réel qui donne la moyenne du signal continu au cours d'un intervalle d'échantillonnage.

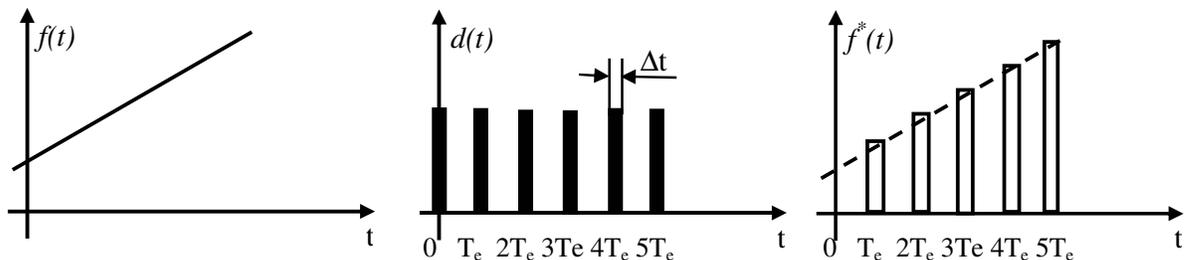


Figure 6 : Passage du signal continu  $f(t)$  au signal discrétisé  $f^*(t)$  avec un échantillonneur moyennneur

## Transformée de Laplace d'un signal échantillonné réel

### Transformée de Laplace d'une impulsion causale

Supposons une impulsion causale  $imp_0(t)$ , de largeur  $\Delta t$  et d'amplitude  $I/\Delta t$ , qui commence à  $t=0$ .

On a vu en TD que ce genre d'impulsion pouvait s'écrire à l'aide de deux fonctions heaviside,  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$ .

$$imp_0(t) = h_1(t) + h_2(t).$$

avec :

$$h_1(t) = \frac{A}{\Delta t} u(t)$$

$$h_2(t) = -\frac{A}{\Delta t} u(t - \Delta t)$$

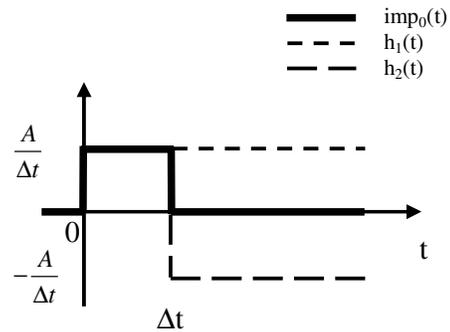


Figure 7 : décomposition d'une impulsion

D'où :  $imp_0(t) = \frac{A}{\Delta t} (u(t) - u(t - \Delta t))$ , donc on peut aisément calculer la transformée de Laplace.

$$\text{soit : } TL[imp_0(t)] = \frac{A}{\Delta t} (TL[u(t)] - e^{-\Delta p} TL[u(t)]) \quad \text{soit } IMP_0(p) = \frac{A}{p\Delta t} (1 - e^{-\Delta p})$$

### Transformée de Laplace d'une impulsion décalée

Supposons que l'impulsion accuse un retard  $T$ . On a une fonction  $imp_T(t)$  qui peut s'écrire :

$$imp_T(t) = \frac{A}{\Delta t} (u(t - T) - u(t - T - \Delta t)),$$

$$\text{d'où : } TL[imp_T(t)] = \frac{A}{\Delta t} (e^{-Tp} TL[u(t)] - e^{-(T-\Delta)p} TL[u(t)]) \quad \text{soit } IMP_T(p) = \frac{A}{p\Delta t} e^{-Tp} (1 - e^{-\Delta p})$$

### Transformée de Laplace d'un signal réel échantillonné

Le signal échantillonné est donc une succession d'impulsions (raies) de largeur  $\Delta t$ , et qui sont toutes décalées de  $T_e$  les unes par rapport aux autres (échantillonnage régulier). On peut donc écrire la fonction  $f^*(t)$  comme étant une somme de fonctions élémentaires, soit :

$$f^*(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) + \dots$$

Par conséquent, nous pouvons écrire la transformée de Laplace, soit :

$$F^*(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p) + \dots$$

$$F^*(p) = \frac{f(0)}{p\Delta t} (1 - e^{-p\Delta t}) + \frac{f(T_e)}{p\Delta t} e^{-T_e p} (1 - e^{-p\Delta t}) + \dots + \frac{f(nT_e)}{p\Delta t} e^{-nT_e p} (1 - e^{-p\Delta t}) + \dots$$

On peut utiliser une écriture plus compacte :  $F^*(p) = \frac{1 - e^{-\Delta p}}{p\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p}$

Donc, on peut voir dans cette expression un terme en  $e^{-p\Delta t}$ , qui correspond à un retard pur et qui traduit la nature de l'échantillonneur. On remarque également que la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/T_e$  influence également la transformée de Laplace du système échantillonné.

### ***Influence de $F_e$ sur la TL d'un signal échantillonné***

On a vu dans le paragraphe précédent que mathématiquement on retrouve l'influence de l'échantillonneur. Or, aujourd'hui nous disposons de systèmes numériques avec des fréquences d'horloge très élevées. Que devient la TL d'un signal si  $\Delta t \ll T_e$  ?

On sait que  $e^{-x}$ , quand  $x \ll 1$ , est équivalent à  $1 - x + x^2/2! - x^3/3! \dots$ . Si on se limite au premier ordre,  $e^{-x} \approx 1 - x$ . On applique cela à notre cas et l'on trouve  $1 - e^{-\Delta p} \approx 1 - 1 + \Delta p = \Delta p$ . Par conséquent, l'expression de  $F^*(p)$  devient :

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p}$$

Ce qui revient à un signal échantillonné idéal.

## **Etude du BOZ en temporel et en fréquentiel**

### ***Fonction de Transfert d'un BOZ***

On montre dans la théorie du signal, que la réponse impulsionnelle d'un système correspond à la fonction de transfert du système lui-même. Soit  $S(p) = T_{BOZ}(p)$ , si  $T_{BOZ}(p)$  est la fonction de transfert du BOZ.

D'après ce que l'on a vu sur le BOZ, on sait qu'une impulsion à son entrée va générer une sortie rectangle d'amplitude égale à celle de l'impulsion et de largeur  $T_e$ . d'où  $s(t) = u(t) - u(t - T_e)$ , pour une impulsion unité.

On en tire que  $S(p) = T_{BOZ}(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$

### ***Etude du module d'un BOZ***

L'étude en régime harmonique faite sans modification de  $T_{BOZ}(j\omega)$  nous conduit à une forme indéterminée. Il faut donc lever cette indétermination.

$$T_{BOZ}(j\omega) = \frac{1 - e^{j\omega T_e}}{j\omega} = e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \left( \frac{e^{j\omega \frac{T_e}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_e}{2}}}{j\omega} \right) = e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \left( \frac{2j \sin\left(\omega \frac{T_e}{2}\right)}{j\omega} \right) = T_e e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}{\frac{\omega T_e}{2}} \right)$$

D'où :

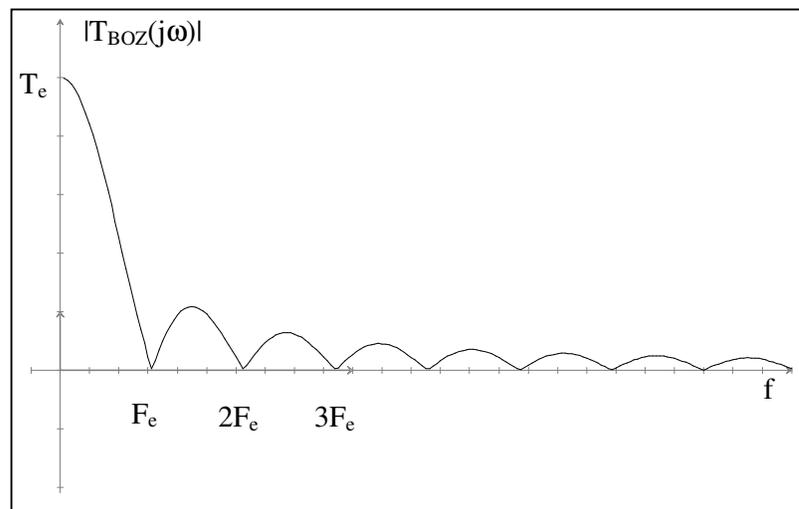
$$|T_{BOZ}(j\omega)| = \left| T_e \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}{\frac{\omega T_e}{2}} \right) \right| = \left| T_e \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) \right|$$

Calculons la valeur max et les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles le module s'annule.

si  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) \approx \frac{\omega T_e}{2}$  donc  $|T_{BOZ}(j\omega)| \rightarrow T_e$

$$T_{BOZ}(j\omega) = 0 \text{ si } \frac{\omega T_e}{2} = k\pi, \text{ soit } \omega = \frac{2k\pi}{T_e} = kF_e$$

D'où la figure classique d'un sinus cardinal.



**Figure 8 : Module d'un BOZ**

Donc, on voit que cet échantillonneur peut aisément faire office de filtre passe bas pour le processus auquel il est associé. En effet, le lobe principal laisse passer le spectre du signal échantillonné, plus la faible partie de ce spectre centrée sur  $F_e$ . Il existera donc une erreur  $\delta$  sur le signal reconstitué. On montre que la fréquence d'échantillonnage vérifie la relation suivante :

$$F_e = f_M \frac{2,2}{\sqrt{\delta}}, \text{ avec } f_M = \text{la fréquence max du signal échantillonné}$$

Par exemple, si on choisit  $\delta \leq 5\%$ , alors  $F_e \geq 10f_M$  (environ).

## **Systemes échantillonnés**

Nous venons de voir pourquoi et comment échantillonner un signal. Maintenant nous allons nous intéresser plus particulièrement aux systèmes asservis échantillonnés.

### ***Les différents signaux mis en jeu***

Un signal électrique déterministe peut être représenté au moins de quatre façons différentes suivant sa nature. Nous allons les détailler.

**La suite n'est pas encore informatisée, voici les titres en attendant !!!**

**Le signal analogique continu  $x(t)$**

**Le signal échantillonné  $x_e(t_k) = x^*(t)$**

**Le signal numérique  $x_e^d(t_k) = x(k)$**

**Le signal en suite numérique  $x(k)$**

**Régulation analogique pilotée par ordinateur**

**Régulation numérique**

***Algorithme de programmation***

**Calcul approché d'une intégrale**

**Méthode d'Euler**

**Méthode des trapèzes**

**Calcul approché d'une dérivée**

**Correcteur numérique à action P**

**Correcteur numérique à action PI**

**Correcteur numérique à action PD**

**Correcteur numérique à action PID mixte**

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>ECHANTILLONNAGE DU SIGNAL .....</b>	<b>1</b>
<b>ECHANTILLONNEUR IDEAL.....</b>	<b>2</b>
<b>ECHANTILLONNEUR REEL.....</b>	<b>3</b>
<b>ECHANTILLONNEUR BLOQUEUR (D'ORDRE ZERO) .....</b>	<b>3</b>
<b>ECHANTILLONNEUR MOYENNEUR.....</b>	<b>3</b>
<b>TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE REEL.....</b>	<b>4</b>
TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UNE IMPULSION CAUSALE.....	4
TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UNE IMPULSION DECALEE .....	4
TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UN SIGNAL REEL ECHANTILLONNE.....	4
INFLUENCE DE $F_E$ SUR LA TF D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE .....	5
<b>ETUDE DU BOZ EN TEMPOREL ET EN FREQUENTIEL.....</b>	<b>5</b>
FONCTION DE TRANSFERT D'UN BOZ.....	5
ETUDE DU MODULE D'UN BOZ .....	5
<b>SYSTEMES ECHANTILLONNES.....</b>	<b>7</b>
LES DIFFERENTS SIGNAUX MIS EN JEU .....	7
<i>Le signal analogique continu <math>x(t)</math></i> .....	7
<i>Le signal échantillonné <math>x_e(t_k)=x^*(t)</math></i> .....	7
<i>Le signal numérique <math>x_e^d(t_k) = x(k)</math></i> .....	7
<i>Le signal en suite numérique <math>x(k)</math></i> .....	7
<b>REGULATION ANALOGIQUE PILOTEE PAR ORDINATEUR.....</b>	<b>7</b>
<b>REGULATION NUMERIQUE .....</b>	<b>7</b>
ALGORITHME DE PROGRAMMATION .....	7
<i>Calcul approché d'une intégrale</i> .....	7
Méthode d'Euler.....	7
Méthode des trapèzes .....	7
<i>Calcul approché d'une dérivée</i> .....	7
<i>Correcteur numérique à action P</i> .....	7
<i>Correcteur numérique à action PI</i> .....	7
<i>Correcteur numérique à action PD</i> .....	7
<i>Correcteur numérique à action PID mixte</i> .....	7