

Chapitre

Rappels (enfin presque)

Système linéaire d'ordre n.

Soit n, un entier. Un système linéaire d'ordre n, d'entrée e(t) et de sortie s(t), est régi, pour t ≥ 0, par une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n, soit :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

La transformée de Laplace de cette équation, si les CI sont non nulles, est :

$$\begin{aligned} & a_0 S(p) + a_1 [pS(p) - S(0^+)] + a_2 [p^2 S(p) - S'(0^+) - pS(0^+)] + \dots + a_n \left[p^n S(p) - \sum_{i=1}^n p^{(i-1)} S^{(n-i)}(0^+) \right] \\ = & \\ & b_0 E(p) + b_1 [pE(p) - E(0^+)] + b_2 [p^2 E(p) - E'(0^+) - pE(0^+)] + \dots + b_m \left[p^m E(p) - \sum_{i=1}^m p^{(i-1)} E^{(m-i)}(0^+) \right] \end{aligned}$$

soit encore :

$$(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) S(p) - CI_s(0^+) = (b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) E(p) - CI_e(0^+)$$

avec, $CI_s(0^+)$, $CI_e(0^+)$, qui sont respectivement la somme des conditions initiales de la sortie s(t), de l'entrée e(t) et de leurs dérivées, quand t tend vers zéro par valeurs positives. D'où :

$$S(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} E(p) - \frac{CI_e(0^+) - CI_s(0^+)}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

Le cas échéant, on utilise la propriété de continuité des systèmes physiques pour déterminer les CI, soit :

$$CI_e(0^+) - CI_s(0^+) = CI_e(0^-) - CI_s(0^-)$$

Dans les cas les plus fréquents en automatique, les CI sont nulles où le système travaille à partir d'un point de repos, d'où la fonction de transfert (ou transmittance) est :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec } n \geq m$$

On définit alors :

- l'ordre n du système, soit le degré en p du dénominateur (quels que soient les autres paramètres), ce qui représente également le nombre de pôles de la fonction T(p),
- le degré en p du numérateur, soit le nombre de zéro de la fonction T(p),
- la classe (ou le type) α de la fonction T(p), soit le nombre de pôles en zéro ou le degré d'intégration en p.

La fonction $T(p)$, d'ordre n , comportant m zéros et α pôles en zéro, peut donc s'écrire de façon générale de la façon suivante :

$$T(p) = K \frac{(1 + \tau'_1 p)(1 + \tau'_2 p) \dots (1 + \tau'_m p)}{p^\alpha (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_{n-\alpha} p)} = KG(p)$$

avec les $\tau'_i = -\frac{1}{z_i}$ et $\tau_j = -\frac{1}{p_j}$, soit z_i les zéros et p_j les pôles de $T(p)$.

On passe facilement à la fonction de transfert complexe, en remplaçant p par $j\omega$. A noter que $T(p)$ est le produit de fonctions de transfert de systèmes du 1^{er} ordre qui seraient donc mis en cascade. Une étude individuelle de ces systèmes permet d'obtenir facilement la réponse harmonique globale de $T(j\omega)$.

Boucle ouverte (bo) et boucle fermée (bf)

Les systèmes (linéaires ou non) peuvent être utilisés soit en bo, soit en bf. En bo, le système réagit à une commande d'entrée sans aucun "contrôle" sur la sortie. Le schéma fonctionnel est donc le suivant :

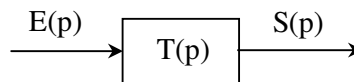


Figure 1 : Schéma fonctionnel d'un SL en boucle ouverte

En bf, la sortie est bouclée sur l'entrée (grâce à un sommateur) nous avons alors un système asservi. Le système physique n'est plus commandé par l'entrée, mais par l'erreur qui existe entre l'entrée et la sortie. Si la grandeur de sortie est de même nature que celle de l'entrée, le rebouclage est généralement directe (sans capteur ou autre conditionneur), on dit que le système asservi est à retour unitaire. Dans le cas contraire, le bouclage est à retour non unitaire.

Remarque : parfois, la boucle de retour est utilisée par un correcteur pour imposer une fonction de transfert spécifique (cf. le paragraphe XIV autres compensations, du chapitre sur les correcteurs du cours AU3).

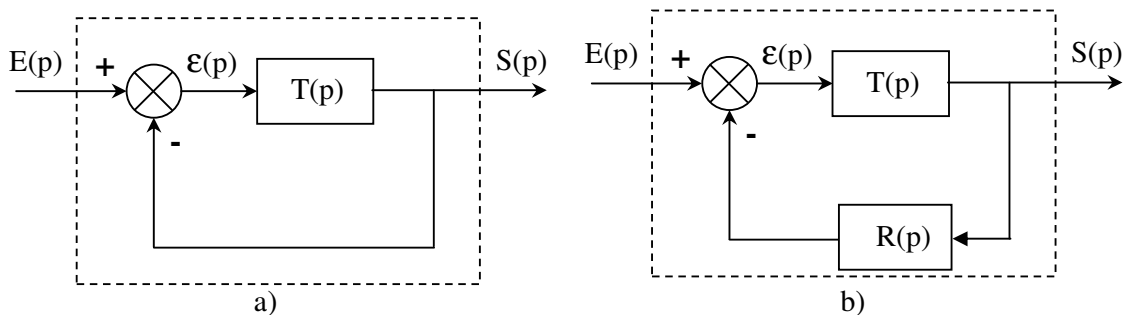


Figure 2 : Schémas fonctionnels d'un SL en bf ; a) à retour unitaire, b) à retour non unitaire

Précision ou erreur statique

Elle ne concerne que les systèmes asservis. Elle traduit l'écart qui existe entre l'entrée (consigne) et la mesure du SA. Elle traduit la précision des SA et elle dépend exclusivement de la classe α de la fonction de transfert en bo (ftbo). Si elle est non nulle, elle dépend du gain dynamique K de la ftbo.

Elle se décline en plusieurs erreurs, selon la nature de l'entrée. Si l'entrée est :

- un échelon, alors on parle d'erreur de position $\varepsilon_p(\infty)$,
- une rampe, alors on parle d'erreur de vitesse $\varepsilon_v(\infty)$,
- une parabole, on parle d'erreur d'accélération $\varepsilon_a(\infty)$.

(cf. le tableau récapitulatif du paragraphe III du chapitre précision des SA du cours AU3)

Stabilité

De même que pour l'erreur statique, la plupart du temps, la stabilité n'a de sens que pour les SA. Par contre, elle est étudiée à partir des caractéristiques de la ftbo. Pour y parvenir, on dispose de critères algébriques et de critères graphiques.

- critères algébriques :
 - condition de stabilité (bo, bf),
 - critère de Routh-Hurwitz,
 - résolution de l'équation caractéristique ($1+T(p)=0$),
 - **critère de Mikailov.**
- critères graphiques :
 - règle du revers (Black, Bode et Nyquist),
 - **critère de nyquist,**
 - **placement des pôles (lieu d'Evans).**

Complément du critère de Routh-Hurwitz

Dans la première partie du cours d'AU3, nous n'avons défini que partiellement ce critère. Le principe ne change pas, on pose toujours l'équation caractéristique, on en tire les coefficients que l'on place sur deux lignes, puis ensuite on calcule tous les autres coefficients comme énoncé en AU3. La règle de stabilité reste la même, à savoir que le SA est stable si tous les coefficients de la première colonne sont du même signe (positif avec des systèmes physiques).

Par contre, il existe deux cas d'exception :

1. si le premier terme de chaque ligne est nul, à l'exclusion des autres, on peut appliquer le critère en multipliant l'équation $1+T(p)$ par un terme $(p+a)$, avec a un réel positif,
2. si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, cela correspond à l'existence de 2 racines conjuguées imaginaires pures (système juste oscillant). On poursuit alors le calcul des coefficients en dérivant le polynôme précédent, et en plaçant sur la ligne en défaut les coefficients du polynôme dérivé obtenus. Les racines conjuguées à partie imaginaires nulles responsables de ce problème, sont les solutions du polynôme dérivé.

Exemple : Soit $1+T(p)=p^4+p^3+5p^2+4p+4=0$

| | | | | Commentaires |
|-------|---|---|---|---|
| P^4 | 1 | 5 | 4 | Coefficients déterminés par le développement de l'équation caractéristique |
| P^3 | 1 | 4 | 0 | |
| P^2 | 1 | 4 | 0 | dernier polynôme non nul soit $A(p)=P^2+4$ |
| P^1 | 0 | 0 | 0 | le polynôme dérivé est $A'(p)=2P$. D'où les nouveaux coefficients de cette ligne |
| | 2 | 0 | 0 | |
| P^0 | 4 | 0 | 0 | ensuite le calcul se poursuit normalement |

Ce système est en limite de stabilité. Les 2 racines conjuguées à partie réelle nulle sont les zéros de $A(p)$, soit $\pm 2j$.

Critère de Mikailov

Ce critère utilise l'équation caractéristique en régime harmonique, qui est décomposée en une partie réelle et une partie imaginaire, soit $A(\omega)+jB(\omega)$ où $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont des polynômes en ω .

En suite on calcule les racines des deux polynômes et le SA est stable si en classant les racines par ordre croissant, on trouve alternativement une racine de $A(\omega)$ et une racine de $B(\omega)$ (ou inversement).

Exemple : soit la ftbo suivante $T(p) = \frac{4}{p(1+p)(1+0,1p)}$

On a $1+T(p)=4+p+1,1p^2+0,1p^3=0$, soit $4+j\omega+1,1(j\omega)^2+0,1(j\omega)^3 = 4-1,1\omega^2 + j(\omega-0,1\omega^3)$

d'où : $A(\omega) = 4-1,1\omega^2$ et $B(\omega) = \omega-0,1\omega^3$

Les racines sont : $A(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{A1} = 1,9 \text{ rd/s}$ $B(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{B1} = 0$ et $\omega_{B2} = \sqrt{10} \text{ rd/s}$

Le classement par ordre croissant donne : $(\omega_{B1} = 0 < \omega_{A1} = 1,9 < \omega_{B2} = \sqrt{10})$. Les racines sont bien alternées, le SA est donc stable.

Plan de Nyquist et sa règle du revers

Le plan de Nyquist est le plan complexe que nous avons utilisé notamment pour placer les pôles. Il en résulte que le lieu de Nyquist est une courbe en coordonnées polaires avec respectivement le module de $T(j\omega)$ pour le rayon vecteur et la phase de $T(j\omega)$ pour l'angle polaire. La courbe doit, tout comme celle de Black être graduée en ω .

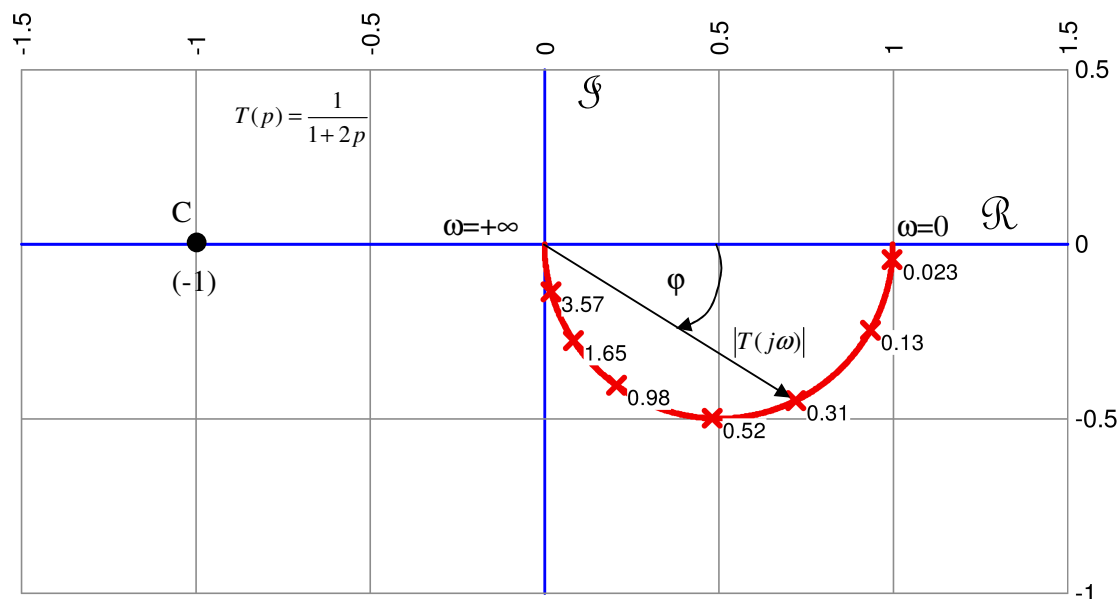


Figure 3 : Exemple de lieu de Nyquist

La règle du revers s'énonce ainsi. Si en parcourant dans le sens des ω croissantes, le lieu de Nyquist de la ftbo d'un SL, on laisse le point critique C sur la gauche, alors le SA sera stable.

Critère de Nyquist

Il arrive que la réponse harmonique en bo d'un SL ait une forme complexe telle que la règle du revers ne permette pas de conclure. Dans ces cas là on utilise un critère graphique plus rigoureux ; le critère de Nyquist.

Condition nécessaire et suffisante :

Un SA est stable si son lieu de Nyquist en bo, décrit de $\omega=+\infty$ à $\omega=-\infty$, entoure le point critique C dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles à partie réelle positive que possède la ftbo.

Mode opératoire

- ☑ On trace, comme jusqu'à lors, le lieu de Nyquist de la ftbo et le point critique C.
- ☑ On complète le lieu par son symétrique par rapport à l'axe des réels. S'il existe deux branches infinies, on les rejoint, dans le sens trigonométrique inverse, par un cercle de rayon infini, ce qui revient à relier les points $\omega=0^-$ à $\omega=0^+$.
- ☑ On compte le nombre de tours que fait le lieu ainsi complété autour du point critique. Soit N ce nombre.
- ☑ Le SA est stable si $N=\text{nbrP}^+$, instable sinon. Avec nbrP^+ , le nombre de pôles à partie réelle positive (qui ont donc tendance à rendre instable le SA).

Exemples :

| $T(p) = KG(p) \frac{K}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ avec τ_1 et $\tau_2 > 0$ | |
|--|---|
| K petit | K élevé |
| | |
| <p>$N=0$, les pôles sont $0, -\frac{1}{\tau_1}$ et $-\frac{1}{\tau_2}$, donc $\text{nbrp}^+=0$, d'où $N=P$, le SA est stable.</p> | <p>$N=2$, les pôles sont $0, -\frac{1}{\tau_1}$ et $-\frac{1}{\tau_2}$, donc $\text{nbrp}^+=0$, d'où $N \neq P$, le SA est instable.</p> |

Placement des pôles

En plaçant les pôles sur un plan complexe, on peut connaître la stabilité et avoir une idée de la rapidité d'un système linéaire. On sait aussi que si la résolution de l'équation caractéristique $1+T(p)=0$ donne des racines à partie réelle négative alors le SA est stable. Tous ces pôles et racines peuvent être représentés dans un plan complexe, mais très souvent ils dépendent du gain dynamique K de la ftbo. Il existe une méthode qui utilise le plan complexe et qui donne la tendance de l'évolution des racines de l'équation caractéristique quand K varie de 0 à $+\infty$.

Positionnement des pôles et des zéros dans le plan complexe

De façon classique, dans le plan complexe, les pôles sont représentés par des x et les zéros par des o ou des \ominus . Voyons quelques exemples avec un gain dynamique K constant.

SL du 1^{er} ordre (bo)

$T(p) = \frac{K(1+\tau'_1 p)}{1+\tau_1 p}$ Le pôle de ce SL est $-1/\tau$, plus il est loin de l'origine, plus le temps de réponse est faible (SL rapide).

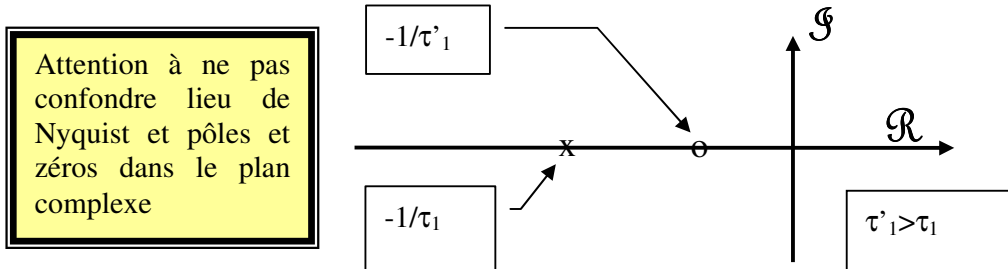


Figure 4 : Placement du pôle et du zéro d'un premier ordre

SL du 2^{ème} ordre (bo)

La nature des pôles dépend de la valeur du coefficient d'amortissement z (cf. cours AU3). Nous allons représenter le cas où $z < 1$, ce qui entraîne la présence de deux pôles conjugués.

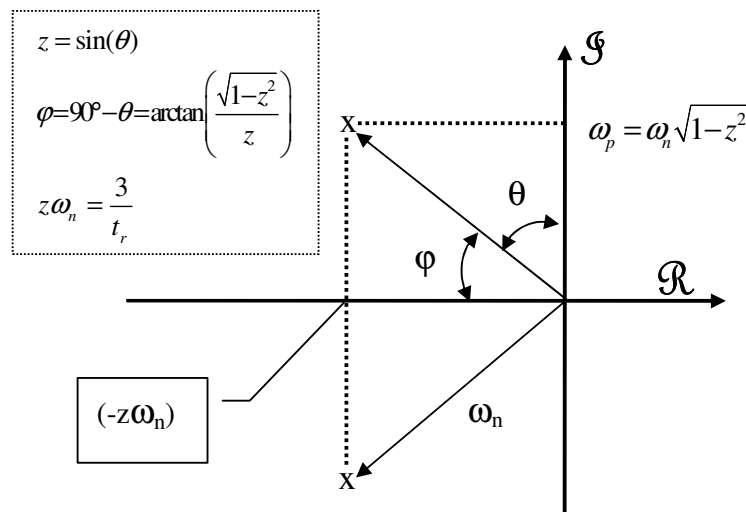


Figure 5 : placement des pôles pour un 2^{ème} ordre quand $z < 1$.

Nous pouvons également déduire de nombreux paramètres de ce plan (voir encadré de la Figure 5). Il apparaît alors clairement, bien que la formule soit une formule approchée, que le temps de réponse du système est inversement proportionnel à la bande passante ($\omega_{c(-3dB)}$ étant proportionnelle à ω_h).

Généralisation à un système quelconque

Soit $T(p) = \frac{K(p-z_1)}{p(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}$ avec z_1 et p_0, p_1 des réels, et p_2 et p_3 deux complexes conjugués.

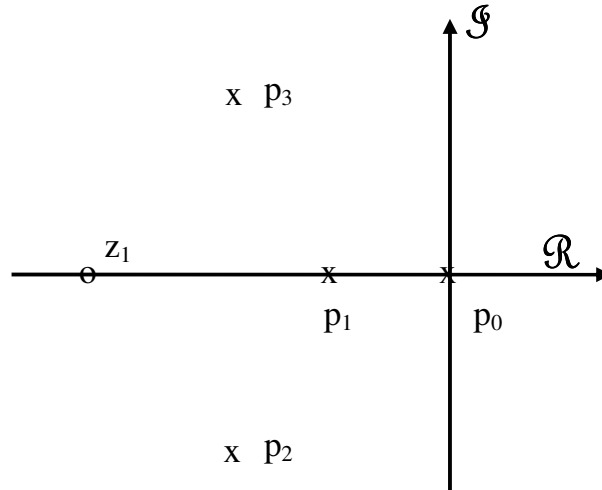


Figure 6 : Placement des pôles et des zéros pour un système quelconque.

Maintenant voyons une méthode qui donne l'évolution des pôles et des zéros en fonction de la valeur du gain dynamique de la ftbo.

LIEU D'EVANS

Soit la ftbo d'un système de la forme $T(p) = K \frac{N(p)}{D(p)}$, où $N(p)$ est un polynôme en p de degré m et $D(p)$ est un polynôme en p de degré n , avec $n \geq m$ (les deux polynômes n'ayant aucune racines communes) et K le gain dynamique de $T(p)$. L'équation caractéristique a alors pour expression :

$$1 + T(p) = K.N(p) + D(p) = 0$$

Ce système en bf sera stable, si les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative. Or, les racines dépendent de K . Le lieu d'Evans est le lieu géométrique décrit dans le plan complexe par les racines de l'équation caractéristique (donc bf) quand le gain dynamique K de la ftbo varie de 0 à l'infini. Les pôles et zéros de la bo sont d'abord positionnés dans le plan complexe.

Conditions sur le module et l'argument

De façon générale, la ftbo d'ordre n possède m zéros z_i et n pôles p_j . Si on définit un coefficient k , réel strictement positif, lié au gain dynamique K de la ftbo par :

$$K = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

alors $T(p)$ peut se mettre sous la forme :

$T(p) = k \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$ où $T(p)$ est un rapport de produits de complexes (modules, phases). nous noterons ρ_i, θ_i le module et la phase des complexes $p-z_i$, et r_j, ψ_j , le module et la phase des complexes $p-p_j$.

L'équation caractéristique donne comme conditions : $|T(p)|=1$
 $\angle T(p) = (2\alpha+1)\pi$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$

Compte tenu de ce qui précède, ceci nous conduit pour qu'un point du plan complexe appartienne au lieu des racines, il faut :

condition sur le module :
$$\frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} = \frac{1}{k}$$

condition sur l'argument :
$$\sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{j=1}^n \psi_j = (2\alpha+1)\pi, \alpha \in \mathbb{Z}$$

Nombre de branches

Le lieu d'Evans est constitué des lieux de chaque racine lorsque k varie de 0 à l'infini, que l'on nomme branche. Or, on sait que p est l'une des racines, si :

$$|T(p)|=1, \text{ soit : } \left| \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} \right| = \frac{1}{k}$$

Une branche :

débute à $k=0$, ce qui entraîne que p est l'un des pôles

et, elle se

termine à $k=+\infty$, soit $k^{-1}=0$, ce qui offre deux possibilités :

○ p est l'un des zéros,

ou

○ $n > m$ et $|p| \rightarrow \infty$

▪ $\frac{|p|^m}{|p|^n} = \frac{1}{p^{n-m}} \rightarrow 0 \text{ quand } |p| \rightarrow \infty \text{ si } n > m$

D'où : Le lieu d'Evans comprend n branches qui partent des n pôles de la ftbo. m d'entre elles se terminent sur un zéro de la ftbo et $n-m$ se terminent à l'infini.

Symétrie du lieu

$T(p)$ étant une fraction rationnelle à coefficients réels, les racines de l'équation caractéristiques sont réelles ou complexes conjuguées deux à deux. Les racines réelles engendrent des branches confondues avec l'axe des réels, les racines conjuguées produisent des branches symétriques par rapport à l'axe des réels.

Branches infinies ou asymptotes

Nous avons $n-m$ branches infinies, qui forme un angle γ avec l'axe des réels. Etant donné la condition sur la phase, on obtient :

$$\gamma = \frac{(2\alpha+1)\pi}{n-m}, \text{ avec } \alpha = 0, 1, \dots, (n-m-1)$$

On démontre que ces asymptotes coupent l'axe des réels au point d'abscisse :

$$x_n = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}, \text{ (le n de x est par analogie avec celui de } \omega_n \text{.)}$$

Appartenance de l'axe réel à un lieu

On montre qu'un point M de l'axe réel appartient à un lieu de racine, si le nombre total de pôles et de zéros situés entre lui et l'origine est impair. (Soit à sa droite pour des pôles et des zéros à partie réelle négative et à sa gauche si la partie réelle est positive).

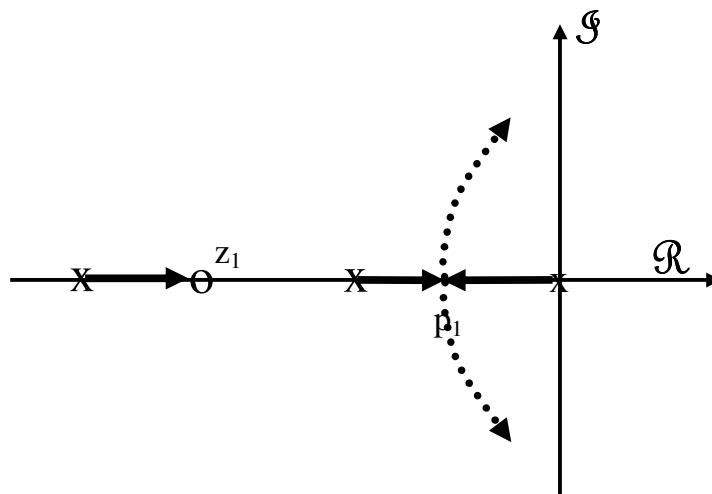


Figure 7 : Exemple de points de l'axe réel appartenant a des lieux de racines

Lorsqu'une partie de l'axe réel est située entre deux pôles ou deux zéros, il existe forcément une divergence. Ce qui revient à dire que les racines sont réelles distinctes puis confondues et ensuite complexes conjuguées. La racine double peut se déterminer par la recherche :

☑ des solutions de l'équation : $\sum_{i=1}^m \frac{1}{x-z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x-p_j}$

☑ des valeurs de x qui annulent $\frac{dy(x)}{dx}$ avec $y(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

Angles de départ et d'arrivée des pôles et des zéros

Si le point est réel, la tangente est horizontale. Si c'est un point de séparation, la tangente est verticale. Si le pôle est complexe, l'angle de départ est donné par :

$$\psi_j = \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{l \neq j} \psi_l + \pi$$

l'angle d'arrivée est donné par :

$$\theta_i = -\sum_{l \neq i} \theta_l + \sum_{j=1}^n \psi_j + \pi$$

Intersection avec l'axe des imaginaires

Le lieu coupe l'axe des imaginaires si les racines sont imaginaires pures. L'équation caractéristique devient $1+T(j\omega)=0$. On sépare les parties réelle et imaginaire, on obtient deux équations que l'on égale à zéro pour trouver les valeurs de k et de ω pour lesquels les point du lieu sont imaginaires purs.

Exemple :

Soit $T(p) = \frac{K}{p(2+2p+p^2)}$, on applique les règles et la démarche indiquées précédemment.

1. recherche du nombre de branches :

Il y a trois pôles dans la ftbo : $(0, -1+j, -1-j)$ et il n'y a pas de zéros, donc **$n-m=3$** . Comme il n'existe aucun zéro, les trois branches se terminent à l'infini.

2. direction des asymptotes :

la direction asymptotique est donnée par $\gamma = \frac{(2\alpha+1)\pi}{n-m}$, avec $\alpha = 0, 1, \dots, (n-m-1)$, donc ici,

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{3}, \gamma_1 = \pi, \gamma_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Elles se coupent sur l'axe réel au point $x_n = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-1-1+j-j-0}{3} = -\frac{2}{3}$

3. axe réel appartenant au lieu

Comme il n'y a qu'un seul pôle réel et que toutes les branches se terminent à l'infini, alors la partie négative de l'axe réel appartient au lieu d'Evans.

4. intersection avec l'axe imaginaire

$1+T(j\omega)=0, K+2j\omega-2\omega^2+j\omega^3$ d'où :

$$\left. \begin{array}{l} K-2\omega^2=0 \\ 2\omega+\omega^3=0 \Rightarrow \omega_1=0 \text{ et } \omega_2=\pm j\sqrt{2} \end{array} \right\} K=4$$

L'allure du lieu d'Evans est alors celle indiquée sur la Figure 8.

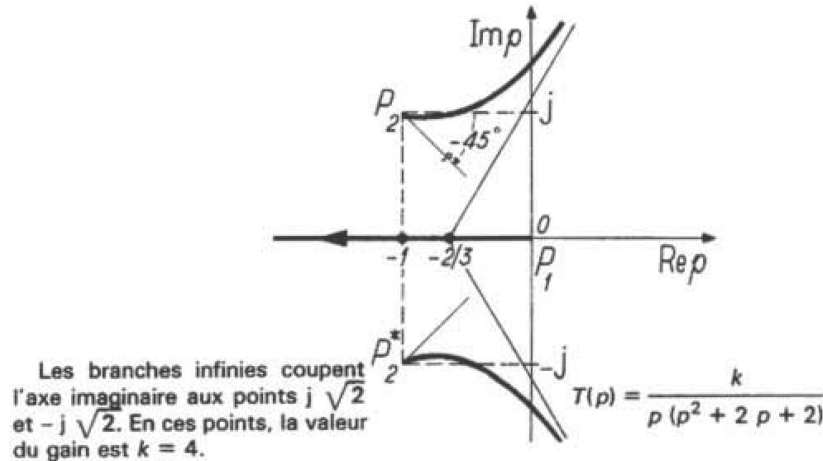


Figure 8 : Tracé du lieu d'Evans (technique de l'ingénieur Claude FOULARD article R 7170, page 20)

Conclusion

De par sa construction, ce lieu permet de préciser la nature et la valeur des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée quand le gain de la boucle ouverte varie. Le lieu d'Evans peut être également exploité, par exemple, pour déterminer la fonction de transfert d'un correcteur. L'introduction de ce dernier permet de modifier la forme du lieu, donc la réponse et, par suite, la précision et la stabilité de l'asservissement.

Contours d'Evans

Les réglages d'un système asservi s'expriment souvent en termes de temps de réponse et de dépassement maximal de la réponse indicielle. On a vu que le lieu des pôles dans le plan complexe renseigne sur la stabilité du SA. Nous allons voir qu'il est possible d'y inscrire les contraintes que l'on se fixe pour un SA, donc indirectement pour le régulateur.

On sait que les pôles p_1 à partie réelle négative, introduisent dans la réponse indicielle des exponentielles décroissantes soit : $e^{p_1 t}$. Le temps de réponse peut alors être approximé à partir du pôle p_x le plus proche de l'axe imaginaire, en considérant que l'effet des autres pôles s'atténue beaucoup plus rapidement (cf paragraphe « SL du 2^{ème} ordre (bo) »).

$$t_r = \frac{-3}{\Re(p_x)}$$

Ainsi, il est possible de matérialiser dans le plan complexe, le temps de réponse maximum $t_{r\max}$ que l'on se fixe, en traçant une droite verticale coupant l'axe réel à la valeur :

$$x_{t_{r\max}} = \frac{-3}{t_{r\max}}, \quad \forall i \Re(p_i) \leq x_{t_{r\max}}, \quad \text{donc pour le système: } t_r \leq t_{r\max}$$

Pour que le temps de réponse prescrit soit respecté, il suffit d'être sûr que tous les pôles se situent à gauche de $x_{t_{r\max}}$ (cf. Figure 9). $x_{t_{r\max}}$ est appelé la *marge de stabilité absolue*.

Nous avons également vu dans le cours de GE11 que le premier dépassement est lié au coefficient d'amortissement selon la relation :

$$D_1 = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}, \text{ soit encore } \frac{\ln(D_1)}{\pi} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

Nous savons également que les pôles conjugués complexes sont liés au coefficient d'amortissement, par la relation suivante pour un pôle p_i dont la partie imaginaire est positive.

$$p_i = -z\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-z^2}$$

On peut, pour ce pôle, établir le quotient de la partie réelle et de sa partie imaginaire et définir alors un angle θ depuis l'axe imaginaire.

$$\frac{\Re(p_i)}{\Im(p_i)} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} = -\tan \theta = \frac{\ln(D_1)}{\pi}$$

On définit alors la *marge de stabilité relative* $\theta_{\text{désir}}$ d'après le dépassement maximal $D_{1\text{max}}$ souhaité pour le système. Si les parties réelle et imaginaire des pôles produisent des angles supérieurs à la marge de stabilité relative, le dépassement du système sera inférieur au dépassement maximal accepté (voir Figure 9) (**Lancer « pôles et zéros » de Brian Woo**).

$$\theta_{\text{désir}} = \arctan\left(\frac{-\ln(D_1)}{\pi}\right), \text{ avec } D_1 \leq D_{1\text{max}}, \text{ d'où } \theta \geq \theta_{\text{désir}}$$

Autrement dit, tous les pôles doivent se trouver à l'intérieur de la portion du plan limité par deux droites formant un angle $\theta_{\text{désir}}$ avec l'axe imaginaire et à gauche de x_{trmax} .

Les limites de l'espace dans lequel doivent se trouver les pôles pour respecter les limites fixées par le temps de réponse et le dépassement (cahier des charges) sont appelées *contour d'Evans* (zone grise, Figure 9). La description dans le lieu des pôles est particulièrement utilisée dans le réglage d'état (hors cours AS21/22), mais aussi dans le réglage classique.

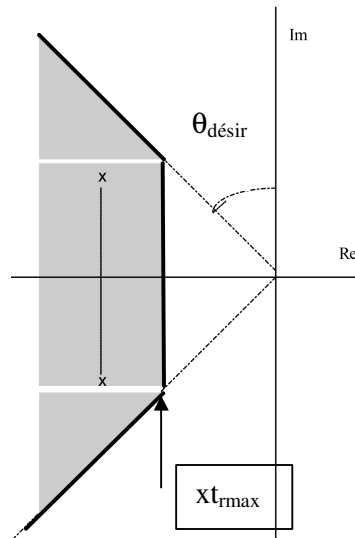


Figure 9 : marge de stabilité et contours d'Evans (J.M. Allenbach, page 6-18)

Influence des pôles et des zéros

Nous allons maintenant voir l'influence des pôles et des zéros que l'on rajoute dans le plan complexe d'un système. Afin de mieux apprécier les variations obtenues, nous allons prendre comme système de base, un SL du 2^{ème} ordre avec 2 pôles complexes conjugués $P_i = -1 \pm j$.

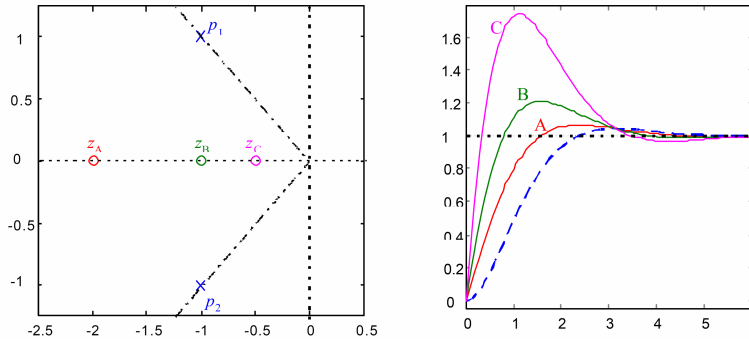


Figure 10 : influence d'un zéro sur un 2^{ème} ordre (J.M. Allenbach, page 6-22)

Lancer l'applet de Brian Woo « pôles et zéros ».

- le système seul présente un $Dr = 5,5\%$.
- on ajoute un zéro en -2 , $Dr = 7,6\%$.
- on ajoute un zéro en -1 , $Dr = 21,9\%$.
- on ajoute un zéro en $-0,5$, $Dr = 70,24\%$.
- on ajoute un zéro en positif, la pente change de signe ?

Un zéro supplémentaire a tendance à augmenter le dépassement d'autant plus qu'il est situé à proximité de l'axe imaginaire; on a un seul dépassement – comportement apériodique – et non un comportement oscillatoire comme on observerait avec un deuxième ordre ($\alpha=m=0$) qui aurait la même valeur de premier dépassement. Le temps de réponse n'est guère affecté par la position du zéro, il est environ égal au temps de pic du système fondamental de départ. On constate que la pente à l'origine de la réponse indicielle est non nulle, comme pour un système du premier ordre; on en conclue que la pente n'est pas nulle pour $n \geq 2$ mais pour $n-m \geq 2$.

Ajoutons maintenant à notre système du 2^{ème} ordre un pôle supplémentaire et regardons ce qui se passe.

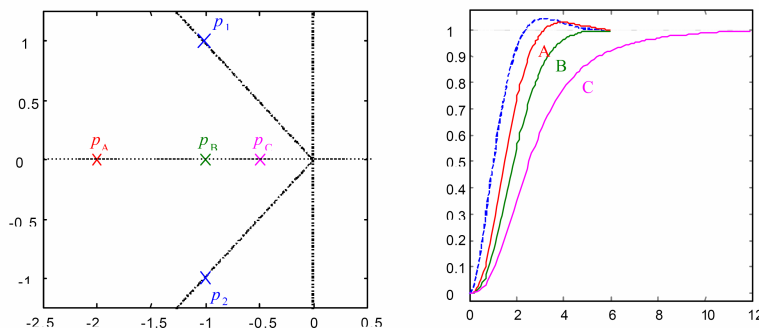


Figure 11 : Influence d'un pôle réel supplémentaire (J.M. Allenbach, page 6-23)

Lancer l'applet de Brian Woo « pôles et zéros ».

- le système seul présente un $tp=3,1s$, $Dr = 5,5\%$; $tr(10\%)=1,5s$
- on ajoute un pôle en -2 , $tp=3,9s$, $Dr = 3,31\%$; $tr(10\%)=1,9s$
- on ajoute un pôle en -1 , $tp=5,5s$, $Dr = \text{non}$; $tr(10\%)=2,3s$
- on ajoute un pôle en $-0,5$, $tp=\text{non}$, $Dr = \text{non}$; $tr(10\%)=4,2s$

On voit que plus le pôle réel se rapproche de l'origine, plus le système est ralenti et plus le dépassement est diminué, jusqu'à ne plus exister. La réponse oscillatoire reste visible, tant que le pôle réel est \geq à la partie réelle des pôles complexes, à partir d'un rapport 4 ou 5, le pôle réel n'a plus d'influence.

Faire la démo en mettant les pôles $0,25 \pm j3$ et mettre le pôle réel à $-0,5$.

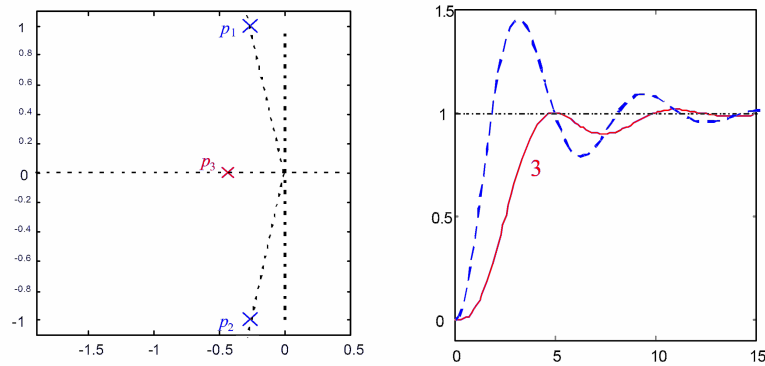


Figure 12 : Influence d'un pôle réel sur un SL mal amorti (J.M. Allenbach, page 6-23)

Lorsque le système est mal amorti, on peut avoir un comportement d'un système du 1^{er} ordre avec des dépassements inférieurs ou légèrement supérieurs à la valeur finale selon la valeur du pôle.

Correction des SL

Maintenant nous connaissons quelques méthodes qui nous permettent de juger de la stabilité et de la précision des SA à partir de l'étude de la ftbo des SL stables en bo.

Nous avons vu dans le cours d'AU3 et nous venons d'en reparler dans ce chapitre, qu'il est parfois nécessaire de corriger les SA. En effet, on attend d'un SA :

- une stabilité assurée en toute circonstance,
- une bonne précision,
- un régime transitoire rapide et bien amorti.

On peut aussi avoir de besoins spécifiques tels qu'en électronique où l'ordre du filtre peut être important. Par conséquent, on ajoutera des pôles loin de l'origine de telle sorte qu'ils n'affecteront globalement pas la réponse du système, mais ils contribueront à la raideur de la pente en haute fréquence.

Nous allons rappeler ici les principaux correcteurs et donner leur symbole.

Correcteur P

La sortie corrigée $\varepsilon_c(p)$ est proportionnelle à l'entrée $\varepsilon(p)$. Le symbole du correcteur est celui porté sur la Figure 13.

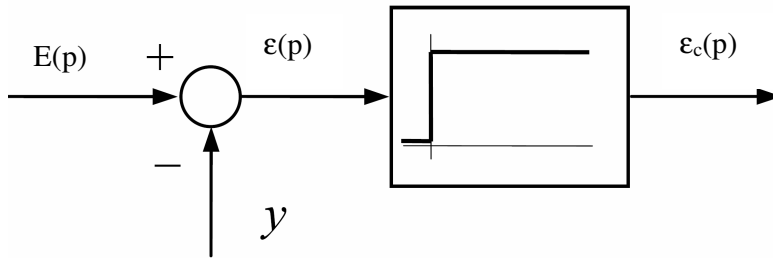


Figure 13 : Symbole du régulateur proportionnel

Ce régulateur permet de régler la précision d'un SA.

Correcteurs I et PI

La sortie corrigée $\epsilon_c(p)$ est proportionnelle à l'intégrale de l'entrée $\epsilon(p)$ et proportionnelle à l'entrée si PI. Les symboles des correcteurs I et PI sont portés sur les Figure 14 et Figure 15. Le I ne s'utilise jamais seul. Il faut souligner qu'il est nécessaire que l'intégrale varie plus lentement que le système à régler sous l'action d'une brusque variation d'écart de réglage, sous peine de provoquer une instabilité du système. En effet, si $\epsilon(p)$ est grande, le terme intégral peut devenir élevé surtout si le SA est lent, d'où une saturation possible de l'intégrateur. Dans ce cas là, on met une condition sur l'erreur, soit ne faire intervenir l'intégration que si $\epsilon(p)$ est inférieure à une valeur fixée ϵ_{\max} .

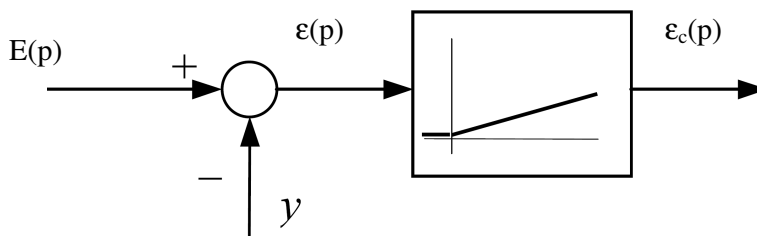


Figure 14 : Symbole d'un correcteur I

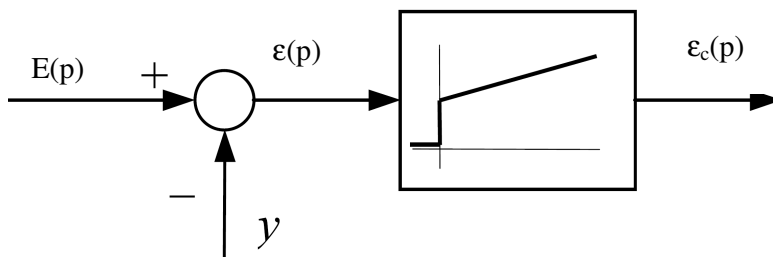


Figure 15 : Symbole d'un correcteur PI

Ce correcteur agit sur la précision du SA.

Correcteur à retard de phase

C'est un régulateur qui est équivalent à un PI. Dans la pratique, il est réalisé par combinaison d'un correcteur PD et d'un filtre du premier ordre, en choisissant la constante de temps de filtrage supérieure à celle de dérivation. Son symbole est porté sur la Figure 16.

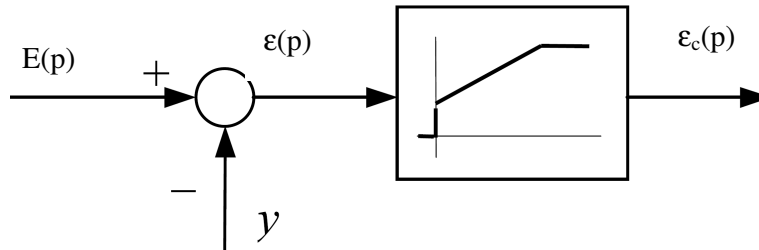


Figure 16 : Symbole d'un correcteur à retard de phase

Correcteur PD

La sortie corrigée $\epsilon_c(p)$ est proportionnelle à l'entrée et la dérivée de l'entrée $\epsilon(p)$. Le symbole du correcteur PD est porté sur la Figure 17. Le D ne s'utilise jamais seul. Il faut souligner que ce correcteur amplifie le bruit.

Dans certains cas, on souhaite compenser deux constantes de temps sans introduire d'intégration. Cela implique une double dérivation.

soit $\epsilon_c(p) = K_r(1 + \tau_{d1}p)(1 + \tau_{d2}p)$, c'est un PD²

Un tel régulateur est très idéal, et non causal! La double dérivation est encore plus propice à amplifier le bruit présent sur les grandeurs mesurées. Le réglage n'est pas aisé et sa qualité est mauvaise, car sujette au bruit.

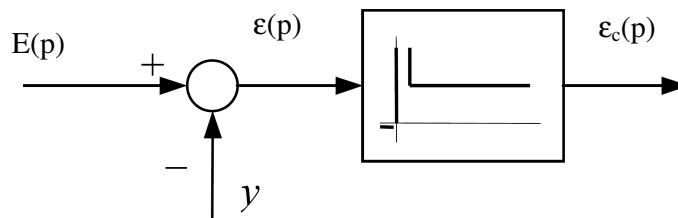


Figure 17 : Symbole d'un correcteur PD

Correcteur à avance de phase

Si l'on souhaite agir sur la phase dans un domaine limité de pulsations on utilise un correcteur approché du PD ; le correcteur à avance de phase (Figure 18). Dans ce cas, on combine un PD avec un filtre du premier ordre, en choisissant une constante de temps de filtrage inférieure à celle de dérivation.

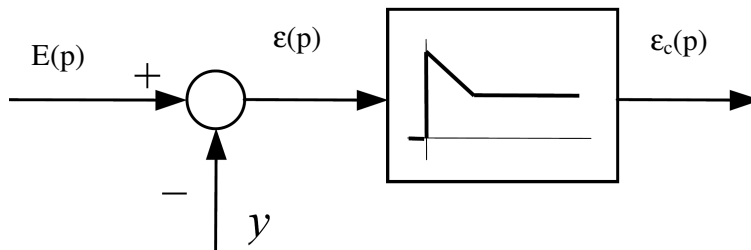


Figure 18 : Symbole d'un correcteur à avance de phase

Correcteur PID

La sortie corrigée $\epsilon_c(p)$ est proportionnelle à l'entrée $\epsilon(p)$ à la dérivée de l'entrée $\epsilon(p)$ et à l'intégrale de l'entrée $\epsilon(p)$. On pourra élaborer de nombreux schéma à l'aide des symboles précédents. Cependant, si aucune spécification n'est nécessaire, on peut utiliser le symbole de la Figure 19.

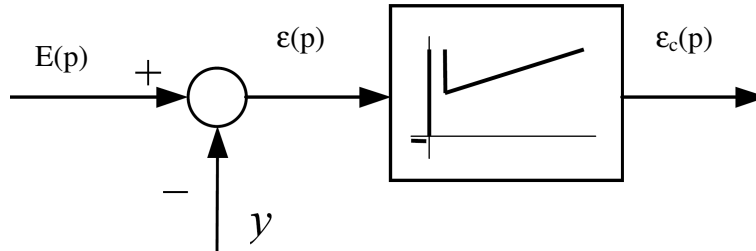


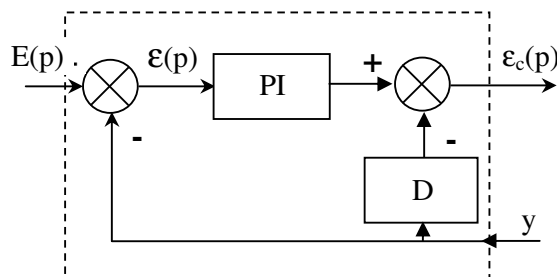
Figure 19 : Symbole d'un correcteur PID sans spécification

Autres méthodes de correction

Variantes de la correction PID

La correction PID classique, quel que soit le schéma choisi, a tendance à amplifier les fluctuations hautes fréquences de la boucle de retour (paramètre y , soit "la mesure"). Nous allons voir quelques variantes de ces schémas.

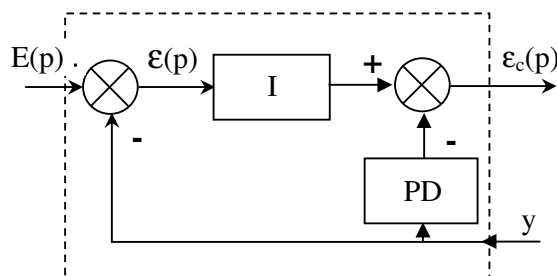
Dérivée sur la mesure



Cette configuration limite l'amplitude des signaux de commande lors des changements d'une consigne en échelon.

Figure 20 : PI plus D sur la mesure

Intégration sur l'erreur et PD sur la mesure



Cette structure est peu courante. Elle est équivalente à la précédente.

Figure 21 : I plus PD sur la mesure

PI et filtrage à avance de phase sur l'erreur

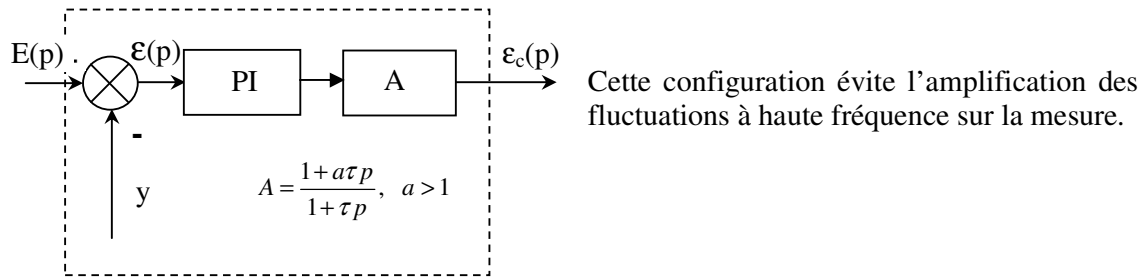


Figure 22 : PI plus D sur la mesure

Intégration conditionnelle

Si l'intégrateur sature, on met une condition sur l'erreur, soit ne faire intervenir l'intégration que si $\varepsilon(p)$ est inférieure à une valeur fixée ε_{\max} .

Remarque : Si l'intégrateur est numérique et qu'il est plus rapide que le système, il peut y avoir saturation ou dépassement de valeurs, soit un saut du positif en négatif ou inversement.

Correcteurs de Smith et PIR (pour SL à retard pur)

Dans le cours d'AU3, nous avons vu que nous pouvions utiliser pour compenser les systèmes à retard purs ($\varphi(\infty) \rightarrow \infty$), un correcteur à retard de phase pour le stabiliser. Nous avons également la possibilité d'utiliser les correcteurs de Smith et PIR.

Le principe consiste à obtenir un SA à retour unitaire, plus une autre fonction de transfert qui correspond au retard pur, mais qui n'est plus dans la boucle de réglage. Ainsi la stabilité est plus facile à gérer. Soit la ftbo :

$$T(p) = KG(p) = KG_1(p)e^{-\tau p} = K \frac{e^{-\tau p}}{1 + \tau p}$$

On introduit dans la boucle de retour un prédicteur du retard, soit $e^{\tau p}$

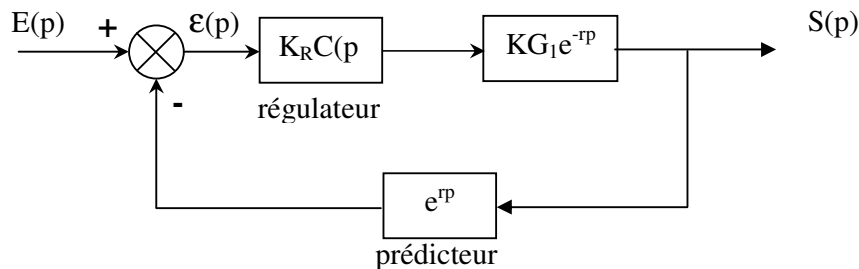


Figure 23 : SA à retard pur et son retour

La transmittance devient : $H_c(p) = \frac{KK_R C(p)G_1(p)e^{-\tau p}}{1 + KK_R C(p)G_1(p)}$ ($e^{-\tau p} \cdot e^{\tau p} = 1$)

Ce qui peut se ramener à un SA à retour unitaire en cascade avec un retard pur. Le schéma équivalent du système corrigé est Figure 24. Ceci remplace le réglage du régulateur sur des méthodes classiques. Cependant, le prédictiveur $e^{-\tau p}$ n'est pas réalisable. Il faut donc aller plus loin en utilisant le schéma de la Figure 25.

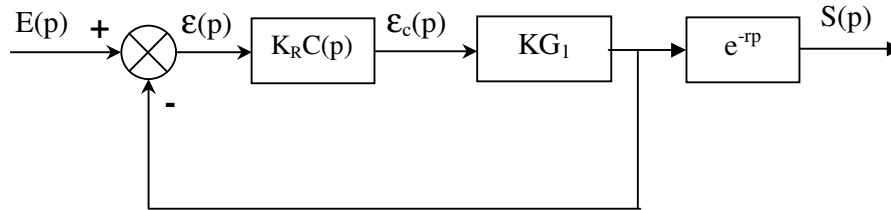


Figure 24 : Schéma équivalent du système à retard pur corrigé

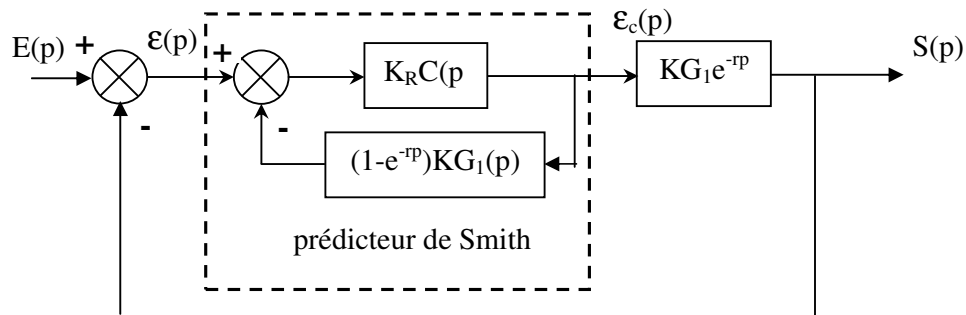


Figure 25 : le prédictiveur de Smith

Si on calcule la fonction de transfert du système de la Figure 25, on trouve la même expression que celle de $H_C(p)$ qui a été calculée ci-dessus. Les deux schémas sont donc équivalents. Le cadre en pointillé, représente le régulateur ou le prédictiveur de Smith.

Dans le commerce, on trouve une forme simplifiée du correcteur de Smith, le correcteur Proportionnel Intégral Retard (PIR). Notons que ce correcteur est intéressant dans le cas où la méthode de Broïda (voir le chapitre Identification) permet de bien modéliser le système réel.

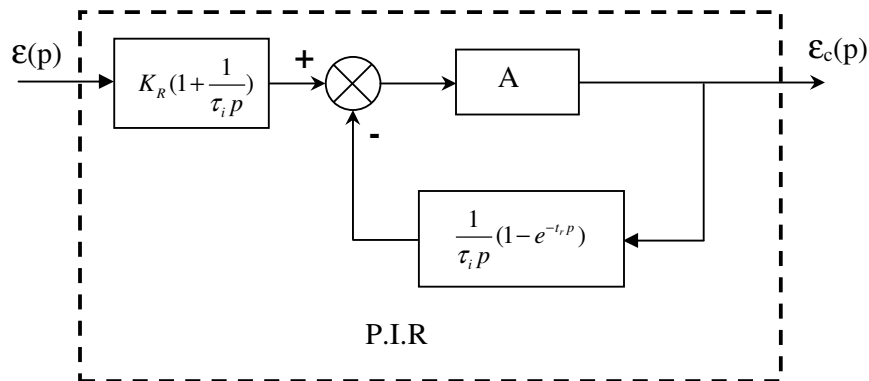


Figure 26 : Schéma du correcteur PIR

Sommaire

| | |
|--|----|
| Système linéaire d'ordre n..... | 1 |
| Boucle ouverte (bo) et boucle fermée (bf)..... | 2 |
| Précision ou erreur statique..... | 3 |
| Stabilité..... | 3 |
| Complément du critère de Routh-Hurwitz..... | 3 |
| Critère de Mikailov..... | 4 |
| Plan de Nyquist et sa règle du revers..... | 4 |
| Critère de Nyquist..... | 5 |
| Condition nécessaire et suffisante : | 5 |
| Mode opératoire | 5 |
| Placement des pôles..... | 6 |
| Positionnement des pôles et des zéros dans le plan complexe..... | 6 |
| SL du 1 ^{er} ordre (bo)..... | 6 |
| SL du 2 ^{ème} ordre (bo) | 6 |
| Généralisation à un système quelconque | 7 |
| LIEU D'EVANS | 7 |
| Conditions sur le module et l'argument..... | 7 |
| Nombre de branches | 8 |
| Symétrie du lieu..... | 9 |
| Branches infinies ou asymptotes | 9 |
| Appartenance de l'axe réel à un lieu..... | 9 |
| Angles de départ et d'arrivée des pôles et des zéros | 10 |
| Intersection avec l'axe des imaginaires | 10 |
| Exemple : | 10 |
| Conclusion..... | 11 |
| Contours d'Evans | 11 |
| Influence des pôles et des zéros | 13 |
| Correction des SL..... | 14 |
| Correcteur P | 14 |
| Correcteurs I et PI..... | 15 |
| Correcteur à retard de phase..... | 16 |
| Correcteur PD..... | 16 |
| Correcteur à avance de phase..... | 16 |
| Correcteur PID | 17 |
| Autres méthodes de correction..... | 17 |
| Variantes de la correction PID | 17 |
| Dérivée sur la mesure..... | 17 |
| Intégration sur l'erreur et PD sur la mesure | 17 |
| PI et filtrage à avance de phase sur l'erreur | 18 |
| Intégration conditionnelle | 18 |
| Correcteurs de Smith et PIR (pour SL à retard pur)..... | 18 |